

## **DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA Y MOMENTO-ROTACIÓN PARA ELEMENTOS DE HORMIGÓN ARMADO Y ACERO CON ASCE/SEI 41 Y SISTEMA DE COMPUTACIÓN CEINCI-LAB**

### ***MOMENT- ROTATION AND MOMENT-CURVATURE DIAGRAM FOR REINFORCED CONCRETE AND STEEL ELEMENTS WITH ASCE/SEI 41 AND COMPUTER SYSTEM CEINCI-LAB***

**Roberto Aguiar<sup>(1)</sup>, David Mora<sup>(2)</sup>, Michael Rodríguez<sup>(1)</sup>**

<sup>(1)</sup> Departamento de Ciencias de la Tierra y la Construcción  
Universidad de Fuerzas Armadas ESPE  
Av. Gral. Rumiñahui, Sangolquí - Ecuador  
[raguiar@espe.edu.ec](mailto:raguiar@espe.edu.ec)

<sup>(2)</sup> Post Grado en Estructuras  
Escuela Politécnica Nacional

## **RESUMEN**

Para el análisis no lineal de estructuras, es necesario conocer el diagrama momento- rotación o el diagrama momento-curvatura, para las vigas y columnas de hormigón armado o de acero y para las diagonales rigidizadoras se necesita conocer el diagrama fuerza-desplazamiento. El ASCE 41 de 2011, proporciona tablas que facilitan el cálculo de estos diagramas, las mismas que se presentan en este artículo, con ejemplos desarrollados, manualmente.

Entre los ejemplos se presenta una estructura de 4 pisos de hormigón armado y una estructura de acero de 6 pisos; en las dos, se tiene disipadores de energía ADAS o TADAS, colocados sobre diagonales de acero en forma de "V" invertida; se presentan los diagramas momento curvatura en varios elementos de estas dos estructuras y manualmente se ilustra el cálculo del diagrama fuerza-desplazamiento para las diagonales de acero, tanto para el caso de compresión como para el caso de tracción; de igual forma se obtiene manualmente el diagrama momento-curvatura para un disipador de energía.

El cálculo con las tablas del ASCE 41 implica evaluar algunos criterios y la mayor parte de las veces se debe interpolar con los valores de las tablas, de tal manera que es bastante laborioso hacerlo manualmente por lo que se presentan

Recibido: Junio de 2015  
Aceptado: Agosto de 2015

varios programas del sistema de computación **CEINCI-LAB** que obtienen los diagramas indicados en el primer párrafo.

## ABSTRACT

For nonlinear analysis of structures, it is necessary to know the moment-rotation diagram or moment curvature diagram, for beams and columns of reinforced concrete or steel and for the stiffening diagonals, these needs to know the force-displacement diagram. The ASCE 41 of 2011 provides tables that facilitate the calculation of these diagrams, the same that those presented in this article, with examples developed manually.

In the examples are presented a reinforced concrete structure of 4 floors and a steel structure of 6 floors, in the these structures, they have energy dissipators TADAS or ADAS mounted on steel bracing in the form of inverted "V"; the moment curvature diagrams are presented in various elements of these two structures and manually calculated the force-displacement diagram for steel diagonal, for both the case compression as in the case of traction, likewise manually, it is obtained the moment-curvature diagram for an energy dissipators.

The calculation with the table of ASCE41 involves assessing certain criteria and most of the time must be interpolated with the values of the tables, so it is quite laborious to do it manually, so several programs are presented of computer system CEINCI-LAB. They get the diagrams indicated in the first paragraph.

## 1. INTRODUCCIÓN

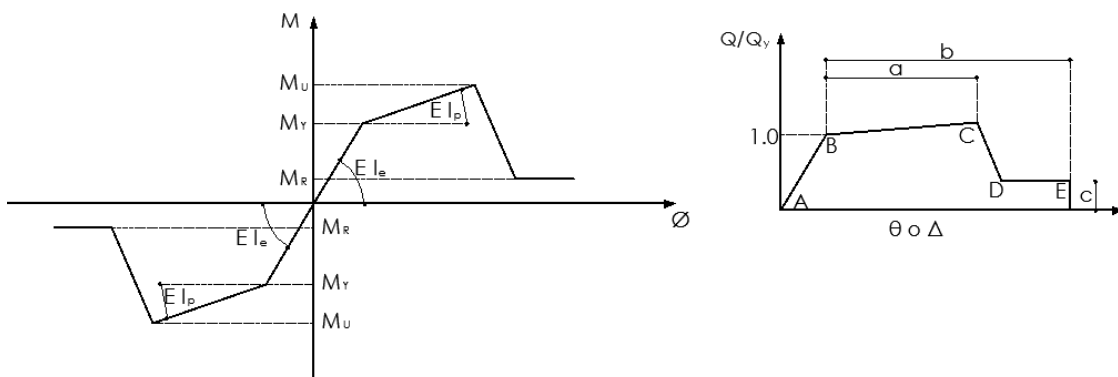
Para el análisis no lineal: estático o dinámico, se necesita conocer las relaciones momento-curvatura o momento-rotación, para el caso de flexión y flexo compresión; de estos diagramas se obtiene la rigidez de una sección de acuerdo al nivel de cargas que gravita sobre la misma. (Aguiar et al., 2015, 1; Mora y Aguiar, 2015; Medina, 2012).

En el sistema de computación **CEINCI-LAB** se tienen los programas **MCviga** y **MCcolumna** que determinan el diagrama momento curvatura de vigas y columnas, respectivamente, utilizando un modelo de hormigón no confinado y un modelo elasto plasto para el acero. Ortiz y Freire (2013)

Para hormigón confinado también se han desarrollado programas para encontrar el diagrama momento curvatura, utilizando el modelo tri lineal para el comportamiento del acero. Aguiar (2002). En resumen el diagrama momento curvatura depende de los modelos constitutivos del hormigón y del acero que se utilicen y para cualquiera de los casos con los que se trabaje se necesita contar con programas de ordenador. Borda (2007), Chioul *et al.* (2008), Rogac (2012), Lepe (2013).

Ahora bien, el ASCE 41 presenta unas tablas que tienen un respaldo teórico y experimental, por medio de las cuales se puede encontrar en forma sencilla las relaciones momento rotación y a partir de estas inferir las relaciones

momento curvatura con las que se halla la rigidez de acuerdo en una sección de acuerdo al estado de daño que tiene la misma.



**Figura 1** Relaciones momento curvatura y modelo del ASCE 41

A la izquierda de la figura 1, se presenta las relaciones momento curvatura, para un modelo que contempla tres zonas de trabajo del elemento; la elástica (sin daño) que es para cuando el momento actuante  $M \leq M_Y$ ; siendo  $M_Y$  el momento de fluencia; en esta zona la rigidez a flexión vale  $E I_e$ . Donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material;  $I_e$  es el momento de inercia de la sección gruesa, que se halla en base a la geometría de la sección; así para una viga rectangular de sección constante  $I_e = b h^3 / 12$ , donde  $b, h$ , son la base y altura de la sección; de tal manera que la rigidez elástica se halla en base a la geometría de la sección transversal del elemento sin utilizar el ASCE 41. De igual manera se halla el momento de fluencia  $M_Y$ .

La segunda zona es la de post fluencia, en esta se cumple  $M_Y < M \leq M_U$ , y la rigidez de la sección es  $E I_p$ ; para esta zona se requiere las propuestas del ASCE 41 pero antes de explicar su cálculo y para terminar con las zonas se indica que la última es la residual que tiene un momento  $M_R$ .

El diagrama presentado a la izquierda de la figura 1 es para el caso de secciones asimétricas que tienen un comportamiento diferente si la parte inferior está traccionada y la superior trabaja a compresión; o al revés.

A la derecha de la figura 1, se presenta la nomenclatura del ASCE 41 para hallar las relaciones momento rotación. En el eje horizontal se indica  $\theta$  (giro) o desplazamiento  $\Delta$ ; y en el eje vertical  $Q/Q_Y$ . Para el caso de flexión esta relación será  $M/M_Y$  y lo interesante es que el valor para el punto B, es la unidad, de tal manera que el momento es el de fluencia  $M_Y$ , que está asociado a una rotación  $\theta_Y$ .

A partir del punto  $M_Y, \theta_Y$ , se encuentra el punto U (gráfico de la izquierda) que corresponde al punto C (gráfico de la derecha) por medio de la variable  $a$  propuesta por ASCE 41. Se determina también el momento residual,  $M_R$ , con la variable  $c$ ; y la rotación final en este segmento  $\overline{DE}$  por medio de la variable  $b$ . Se destaca que en el hormigón el punto U está asociado a una deformación a la compresión que está entre 0.003 y 0.004; en cambio para la zona residual esta deformación se halla entre 0.004 y 0.008.

Las variables  $a, b, c$ , presentan el ASCE 41 de 2011 para elementos de acero y hormigón armado y se indican en este artículo con ejemplos y programas de computación del sistema **CEINCI-LAB**.

Es una gran ventaja contar con las tablas del ASCE 41 para hallar las relaciones momento-rotación, en forma relativamente sencilla pero se debe tener claro que en el modelo del ASCE 41 (figura 1) el punto C, se encuentra a la derecha del punto B, es decir la sección tiene ductilidad por curvatura pero si la viga no tiene ductilidad debido a que la cuantía de acero a tracción es similar o igual a la cuantía balanceada, no va a existir el punto C. (Marín 1979). De tal manera que se recomienda un poco de precaución, tratando de no estar en los límites de los criterios que presentan las tablas.

## 2. PUNTO DE FLUENCIA PARA VIGAS Y COLUMNAS DE HORMIGÓN

Como se acaba de ver el diagrama momento rotación se halla a partir del punto de fluencia Y, utilizando los coeficientes  $a, b, c$ , del ASCE 41. Para encontrar el punto Y se decidió trabajar con la propuesta de Y. Park (1985) que cuenta con un respaldo teórico y experimental del ensayo de 400 elementos de vigas y columnas de hormigón armado. Las ecuaciones de cálculo se indican a continuación.

$$M_Y = 0.5 f'_c b d^2 [(1 + \beta_c - \eta) \eta_0 + (2 - \eta) p_t + (\eta - 2\beta_c) \alpha_c p'_t]$$

$$\beta_c = \frac{d'}{d} \quad \eta = \frac{0.75}{1 + \alpha_y} \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^{0.7} \quad \alpha_y = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_0} \quad \eta_0 = \frac{P_0}{b d f'_c}$$

$$p_t = \frac{A_s f_y}{b d f'_c} \quad p'_t = \frac{A'_s f_y}{b d f'_c} \quad \varepsilon_c = \phi_y d - \varepsilon_y \leq \varepsilon_u$$

$$\alpha_c = (1 - \beta_c) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_y} - \beta_c \leq 1$$

$$\phi_y = \left[ 1.05 + (c_2 - 1.05) \frac{\eta_0}{0.03} \right] \frac{\varepsilon_y}{(1 - k)d}$$

$$k = \sqrt{(p_t + p'_t)^2 \frac{1}{4 \alpha_y^2} + (p_t + \beta_c p'_t) \frac{1}{\alpha_y} - (p_t + p'_t) \frac{1}{2 \alpha_y}}$$

$$c_2 = 1 + \frac{0.45}{(0.84 + p_t)}$$

Donde  $b, d, d'$ , son la base, la altura efectiva y el recubrimiento de la armadura a compresión;  $f_y, \varepsilon_y, f'_c, \varepsilon_0$  son: el límite de fluencia del acero, la deformación de fluencia, la resistencia máxima del hormigón a compresión, y la deformación asociada a la resistencia máxima del hormigón;  $P_0$  es la carga axial que gravita sobre el elementos, para vigas es igual a cero;  $\varepsilon_c$  es la deformación del acero a compresión que tiene que ser menor a la deformación última  $\varepsilon_u$  que puede ser igual a 0.003 para diseño o 0.004 para análisis;  $A_s, A'_s$  es el área de la armadura que trabaja a tracción y compresión respectivamente, para el caso de columnas se considera que  $A_s = A'_s$ ;  $M_Y, \phi_Y$ , son el momento y curvatura en el punto de fluencia.

Con el modelo de Park (1985) también se puede hallar el momento y curvatura para el punto último ( $M_U, \phi_U$ ), en Aguiar (2003) se indica las ecuaciones de cálculo para este punto.

### 3. RELACIONES PARA VIGAS DE HORMIGÓN

En las tres primeras columnas de la tabla 1, se indican los parámetros que se deben evaluar, antes de encontrar los valores de  $a, b, c$ . que están en las tres últimas columnas. El primer parámetro está relacionado con las cuantías de acero; el segundo define si el refuerzo transversal utilizado está confinando o no a la viga y el tercero está relacionado con el cortante actuante. A continuación se indica el cálculo de estos parámetros.

- Cuantía a flexión

$$\rho = \frac{A_s}{b d} \quad \rho' = \frac{A'_s}{b d} \quad \rho_b = \frac{0.85 f'_c}{f_y} \beta_1 \left( \frac{6120}{6120 + f_y} \right)$$

$$\beta_1 = 0.85 \text{ para } f'_c \leq 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$\beta_1 = 0.65 \leq 1.05 - f'_c/1400 \leq 0.85 \text{ Para } f'_c > 280 \text{ kg/cm}^2$$

Las variables todavía no definidas son:  $\rho, \rho', \rho_b$ , que son la cuantía del acero a tracción, a compresión y la cuantía balanceada. Con estas cuantías de determina la relación:  $\frac{\rho - \rho'}{\rho_b}$  y en base a su valor se ingresa a la tabla 1.

- Refuerzo Transversal confinado, si cumple:

$$s \leq \frac{d}{3} \quad V_s > \frac{3}{4} V \quad V_s = \frac{A_v * f_y * d}{s}$$

Donde  $A_v$  es el área del refuerzo transversal;  $f_y$  es el límite de fluencia;  $d$  es la altura efectiva;  $s$  es el espaciamiento de los estribos;  $V_s$  es la capacidad al corte de la armadura transversal;  $V$  es el cortante actuante.

- Cortante actuante

$$\frac{V}{b_w * d * \sqrt{f'_c}}$$

Si se trabaja el cortante  $V$  en T.; las dimensiones de la viga o columna:  $b_w, d$ , en m., y la resistencia del hormigón en T/m<sup>2</sup>, se debe multiplicar el resultado por 1.1926 para pasar Pound/in.

**Tabla 1 Parámetros y criterios de aceptación para procedimientos no lineales en vigas de hormigón.**

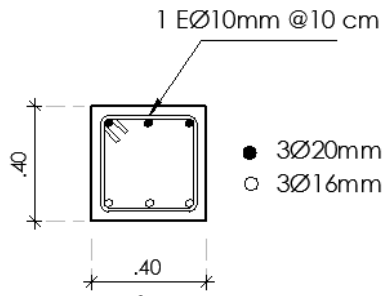
<b>i.i) Vigas controladas por flexión</b>			<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>
$\frac{\rho - \rho'}{\rho_{bal}}$	<b>Refuerzo Transversal</b>	$\frac{V(pound)}{b_w(in)d(in)\sqrt{f'_c(psi)}}$			
$\leq 0.0$	Confinado	$\leq 3$	0.025	0.05	0.2
$\leq 0.0$	Confinado	$\geq 6$	0.02	0.04	0.2
$\geq 0.5$	Confinado	$\leq 3$	0.02	0.04	0.2
$\geq 0.5$	Confinado	$\geq 6$	0.015	0.02	0.2
$\leq 0.0$	No Confinado	$\leq 3$	0.02	0.03	0.2
$\leq 0.0$	No Confinado	$\geq 6$	0.01	0.015	0.2
$\geq 0.5$	No Confinado	$\leq 3$	0.01	0.015	0.2
$\geq 0.5$	No Confinado	$\geq 6$	0.005	0.01	0.2
<b>i.ii) Vigas controladas por corte</b>					
Espaciamiento de estribos $\leq d/2$			0.0030	0.02	0.2
Espaciamiento de estribos $> d/2$			0.0030	0.01	0.2

- **Ejemplo 1**

Dada una viga cuadrada de 40 cm., de lado y doblemente armada como se indica en la figura 2; el recubrimiento es de 6 cm.; el refuerzo transversal está

constituido por varillas de 10 mm, espaciados cada 10 cm. El hormigón tiene un  $f'_c = 240 \text{ kg/cm}^2$ , y el acero es A 36. El módulo de elasticidad del hormigón es  $1500000 \text{ T/m}^2$ , del acero  $20430000 \text{ T/m}^2$ . Se pide:

- Determinar la rigidez axial  $EA$ , y rigidez a flexión  $EI$  en el rango elástico.
- Encontrar los parámetros  $a, b, c$ , de la tabla 1 si el cortante  $V = 0$  y el momento inicial  $M = 0$ , inicio de cálculo.
- Hallar el Momento y curvatura a nivel de fluencia.



$$E_c = 1'500.000 \text{ T/m}^2$$

$$f_y = 25300 \text{ T/m}^2$$

$$E_s = 20'430.000 \text{ T/m}^2$$

$$f_u = 40800 \text{ T/m}^2$$

**Figura 2** Geometría de una sección de una viga y parámetros del acero y concreto.

### • Solución

- Rigidez axial y a flexión

$$A = 0.40 * 40 = 0.16 \text{ m}^2$$

$$I = \frac{0.40 * 40^3}{12} = 0.00213 \text{ m}^4$$

La rigidez axial  $EA$  y a flexión  $EI$ , valen:

$$EA = 240000 \text{ T.}$$

$$EI = 3200 \text{ T/m}$$

- Factores  $a, b, c$ , de tabla 1.

$$As = 3\phi 16 \text{ mm} = 6.03$$

$$As' = 3\phi 20 \text{ mm} = 9.42 \text{ cm}^2$$

$$\rho = \frac{6.03}{40 * 34} = 0.0038$$

$$\rho' = \frac{9.42}{40 * 34} = 0.0059$$

$$\rho_b = 0.0053$$

$$\frac{\rho - \rho'}{\rho_b} = -0.4039$$

A continuación, se procede a determinar si la sección se encuentra confinada, para lo cual la viga se encuentra armada con  $1\Phi 10 \text{ mm @ } 10\text{cm}$ .

$$A_v = 2\Phi 10 \text{ mm} = 1.57 \text{ cm}^2$$

$$V_s = \frac{1.57 * 4200 * 34}{10} = 22.43 \text{ T}$$

Al cumplir las dos condiciones presentadas anteriormente se puede determinar que la sección se encuentra **confinada**. Por otra parte, al ser  $V = 0$ , dato del problema. Los valores  $a, b, c$  son los de la primera fila de la tabla 1.

$$a = 0.025 \quad b = 0.050 \quad c = 0.200$$

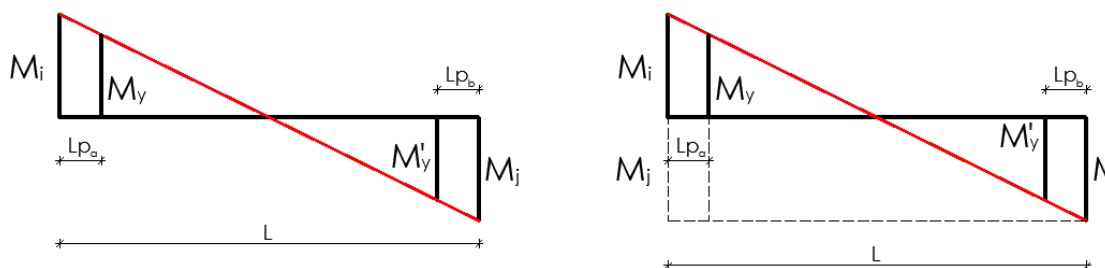
iii) Momento y curvatura de fluencia

Al aplicar las ecuaciones de Y. Park (1985) se halla que el momento y curvatura de fluencia valen:

$$M_Y = 7.6679 \text{ Tm.} \quad \phi_Y = 0.0081 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

### 3.1 Longitud plástica

Cuando se supera el momento de fluencia  $M_Y$  se tiene una longitud plástica en el nudo inicial que se denomina  $L_{pa}$ , y cuando se supera el momento de fluencia  $M'_Y$  en el nudo final se tiene la longitud  $L_{pb}$ ; a la izquierda de la figura 3 se presenta la nomenclatura indicada donde los momentos actuantes se han denominado  $M_i, M_j$ ; en la gráfica estos dos momentos son anti horarios.



**Figura 3** Diagrama de momentos y longitudes plásticas

En la gráfica de la derecha de la figura 3, el valor de  $M_j$  se lo ha colocado al lado del momento  $M_i$ , ya que de esta forma se facilita el cálculo de la longitud plástica. En efecto, de la relación de triángulos semejantes, se tiene:

$$\frac{M_i + M_j}{L} = \frac{M_Y + M_j}{L - L_{pa}}$$



Al despejar  $L_{pa}$  se encuentra:

$$L_{pa} = \left( \frac{M_i - M_Y}{M_i + M_j} \right) L$$

Para el nudo final, se procede en forma similar y se halla:

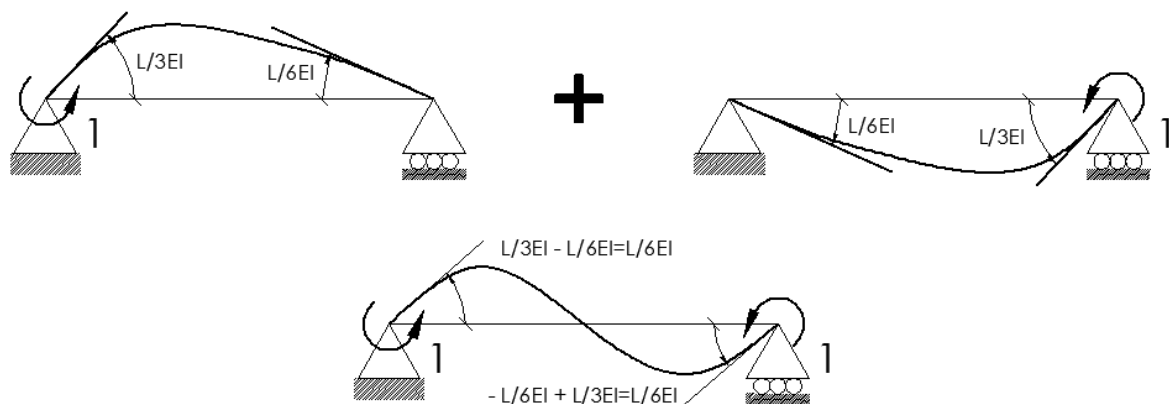
$$L_{pb} = \left( \frac{M_j - M'_Y}{M_i + M_j} \right) L$$

Nótese en las dos ecuaciones que el numerador debe ser siempre positivo, de tal manera que la longitud plástica será positiva.

### 3.2 Rotación de fluencia

Para calcular la rotación de fluencia  $\theta_Y$  es necesario recordar la forma como se obtiene la matriz de flexibilidad en una viga que se encuentra sobre un apoyo fijo en el nudo inicial y un rodillo en el nudo final. Aguiar (2014).

Para encontrar la matriz de flexibilidad se aplica un momento unitario en el nudo inicial y se calculan los giros en el nudo inicial y final que son  $L/3EI$ ,  $L/6EI$ , respectivamente, gráfico superior izquierdo de figura 4; al aplicar el momento unitario en el nudo final se hallan los giros indicados en la gráfica superior derecha de la figura 4. Se recuerda la convención de signos que anti horario es positivo.



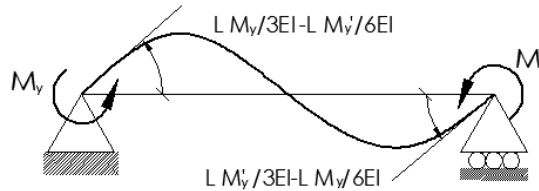
**Figura 4** Elementos de la matriz de flexibilidad de un elemento de sección constante

Ahora, cuando se aplican los dos momentos unitarios a la vez, al aplicar el principio de superposición lineal se tienen los giros indicados en la parte inferior de la figura 4.

Si en lugar de aplicar un momento unitario, se tiene un momento  $M_Y$  en el nudo inicial, y un momento  $M'_Y$  en el nudo final; los giros que se encuentran son los de fluencia  $\theta_Y, \theta'_Y$ . Nuevamente por el principio de superposición, estos giros valen:

$$\theta_Y = \frac{L M_Y}{3 EI} - \frac{L M'_Y}{6 EI}$$

$$\theta'_Y = \frac{L M'_Y}{3 EI} - \frac{L M_Y}{6 EI}$$



**Figura 5** Rotaciones de fluencia en nudo inicial y nudo final

La figura 5 considera que las dos secciones ingresan simultáneamente al rango no lineal (hipótesis conservadora) ya que la mayor parte de las veces solo una de las secciones ingresará al rango no lineal y la otra no.

Para el caso particular en que  $M_Y = M'_Y$ , la rotación de fluencia es la recomendada por el ASCE 41, que resulta la siguiente para elementos de hormigón armado.

$$\theta_Y = \frac{L M_Y}{6 EI}$$

Para elementos de acero el momento de fluencia  $M_Y = z f_y$ . Luego la ecuación resulta.

$$\theta_Y = \frac{L z f_y}{6 EI}$$

Las variables todavía no indicadas, son:  $z$  es el momento estático ( $z = \int y dA = A_c * brazo_s + A_t * brazo_i$ );  $f_y$  es el esfuerzo de fluencia del acero.

Las ecuaciones indicadas son para vigas. Ahora para columnas, el ASCE 41 recomienda la siguiente ecuación.

$$\theta_Y = \frac{L z f_y}{6 EI} \left( 1 - \frac{P}{P_{CL}} \right)$$

Donde  $P$  es la carga axial que gravita en la columna;  $P_{CL}$  es la carga crítica de pandeo. De acuerdo al ASCE 41, la carga crítica se calcula de la siguiente manera.

Se determina la relación  $L/r$ . Donde  $L$  es la longitud del elemento;  $r$  es el radio de giro. Se debe verificar que:

$$\frac{L}{r} \leq 108$$

Si la relación  $L/r$  es menor a 108; el esfuerzo del material  $F_{cr}$  es 12 (psi); caso contrario vale:

$$F_{cr} = \frac{1.4 * 10^5}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \quad (psi)$$

Para pasar de (psi) a (T/m<sup>2</sup>) se debe multiplicar por 703.069. Finalmente, la carga crítica de pandeo se halla con la siguiente ecuación.

$$P = A F_{cr}$$

Donde  $A$  es el área de la sección transversal.

### 3.3 Factor que mide efecto de corte

El factor que mide el efecto de corte  $\phi$  para un elemento de sección constante que trabaja en el rango elástico vale (Aguar, 2014)

$$\phi = \frac{3 \beta E I}{G A L^2}$$

Las variables no definidas son:  $\beta$  coeficiente de forma que vale 1.2 para secciones rectangulares;  $G$  es el módulo de corte. Ahora bien, interesa calcular el factor  $\phi$  para un elemento de sección constante, que ha ingresado al rango no lineal y tiene una longitud plástica  $L_{pa}$  asociada a una rigidez  $EI_a$ , en el nudo inicial; en el nudo final la longitud plástica es  $L_{pb}$  y la rigidez es  $EI_b$ ; la longitud central que no ha ingresado al rango no lineal es:  $L - L_{pa} - L_{pb}$ , y tiene una rigidez  $EI_0$ . Solo para el cálculo del factor  $\phi$  se determinará una rigidez ponderada en función de las longitudes, denominada  $EI_m$ .

$$EI_m = \frac{L_{pa} EI_a + (L - L_{pa} - L_{pb}) EI_0 + L_{pb} EI_b}{L}$$

Finalmente se determina un solo factor del efecto de corte, aplicable al nudo inicial, centro de luz y nudo final, denominado  $\phi_m$

$$\phi_m = \frac{3 \beta EI_m}{G A L^2}$$

- **Ejemplo 2**

La viga de 40/40 del Ejemplo 1, tiene una longitud de 6.0 m.; un momento de fluencia  $M_Y = 7.6679 \text{ Tm.}$ , una curvatura de fluencia  $\phi_Y = 0.0081 \frac{1}{m}$ . En un

instante de cargas dinámicas, el momento actuante en sus extremos es de  $M_i = M_j = 8 \text{ Tm.}$ , y el cortante actuante es  $V = 2.7 \text{ T}$ . Se pide:

- i) Calcular la rotación de fluencia  $\theta_y$  de acuerdo al ASCE 41;
- ii) La longitud plástica, considerando  $M'_y = M_y$ .
- iii) El diagrama Momento rotación con la formulación ASCE 41
- iv) El diagrama Momento curvatura de acuerdo al ASCE 41

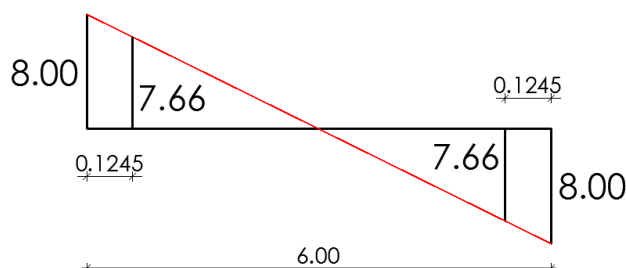
### • Solución

- i) Rotación de fluencia

$$\theta_y = \frac{6 * 7.6679}{6 * 3200} = 0.0024$$

- ii) Longitud plástica

Los momentos actuantes en los extremos son anti horarios y valen  $8 \text{ Tm.}$ , (dato del ejemplo), los momentos de fluencia valen  $7.6679 \text{ Tm}$ , como se indica en la figura 6.



**Figura 6** Momentos actuantes y de fluencia para calcular longitud plástica

$$L_p = \left( \frac{8.00 - 7.6679}{8.00 + 8.00} \right) * 6 = 0.1245 \text{ m}$$

- iii) Relación momento rotación

En el Ejemplo 1, se encontró que  $(\rho - \rho')/\rho_b$  es menor a cero; que la viga está confinada; y ahora, en base al cortante actuante de  $V = 2.7 \text{ T}$ . Se demuestra que la relación  $V/(b d \sqrt{f'_c})$  es menor a 3.

$$\frac{V}{b d \sqrt{f'_c}} = \frac{2.7}{0.4 * 0.34 * \sqrt{240}} * 1.1926 = 1.5283 \frac{\text{Pound}}{\text{in}}$$

Luego de la tabla 1 se encuentra:

$$a = 0.025 \quad b = 0.050 \quad c = 0.200$$

Con estos valores se halla el diagrama momento rotación de acuerdo al ASCE 41

$$\theta_U = \theta_Y + a = 0.0024 + 0.025 = 0.0274 \text{ rad}$$

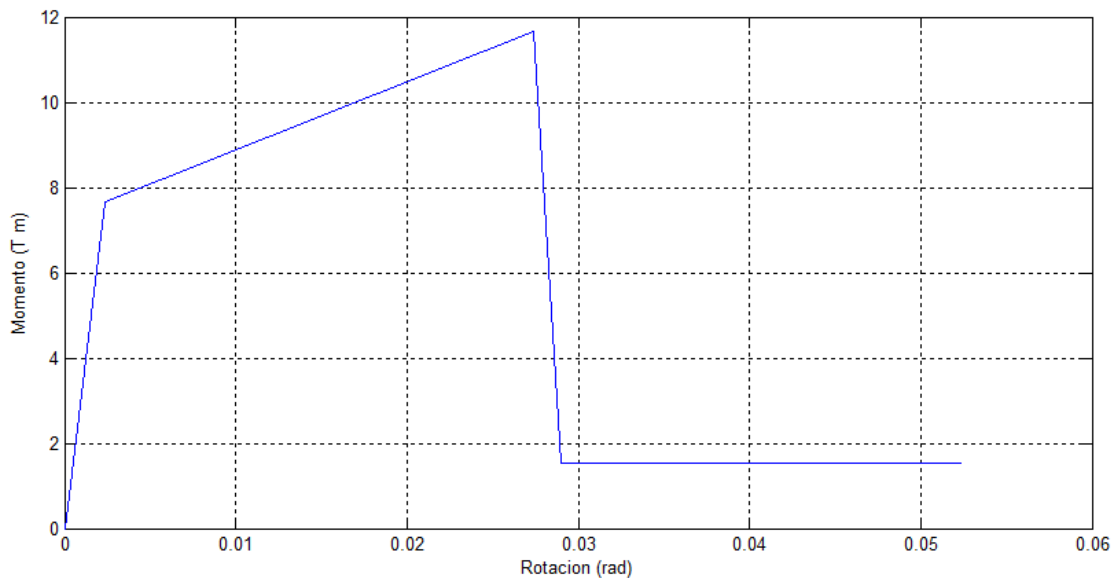
$$M_U = M_Y + 0.05 EI (\theta_U - \theta_Y)$$

$$M_U = 7.6679 + 0.05 * 3200 (0.0274 - 0.0024) = 11.6679 \text{ T m}$$

$$M_R = c M_Y = 0.20 * 7.6679 = 1.5336 \text{ T m}$$

$$\theta_R = \theta_Y + b = 0.0024 + 0.05 = 0.0524 \text{ rad}$$

El diagrama momento rotación se indica en la figura 7.



**Figura 7** Diagrama momento rotación de acuerdo al ASCE 41

iv) Diagrama momento curvatura

$$\phi_Y = 0.0081 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$\phi_U = \phi_Y + \frac{\theta_U}{L_p} = 0.0081 + \frac{0.0274}{0.1245} = 0.2282 \frac{rad}{m}$$
$$\phi_R = \phi_Y + \frac{\theta_R}{L_p} = 0.0081 + \frac{0.0524}{0.1245} = 0.4290 \frac{rad}{m}$$

En la figura 8 se indica el diagrama momento curvatura.

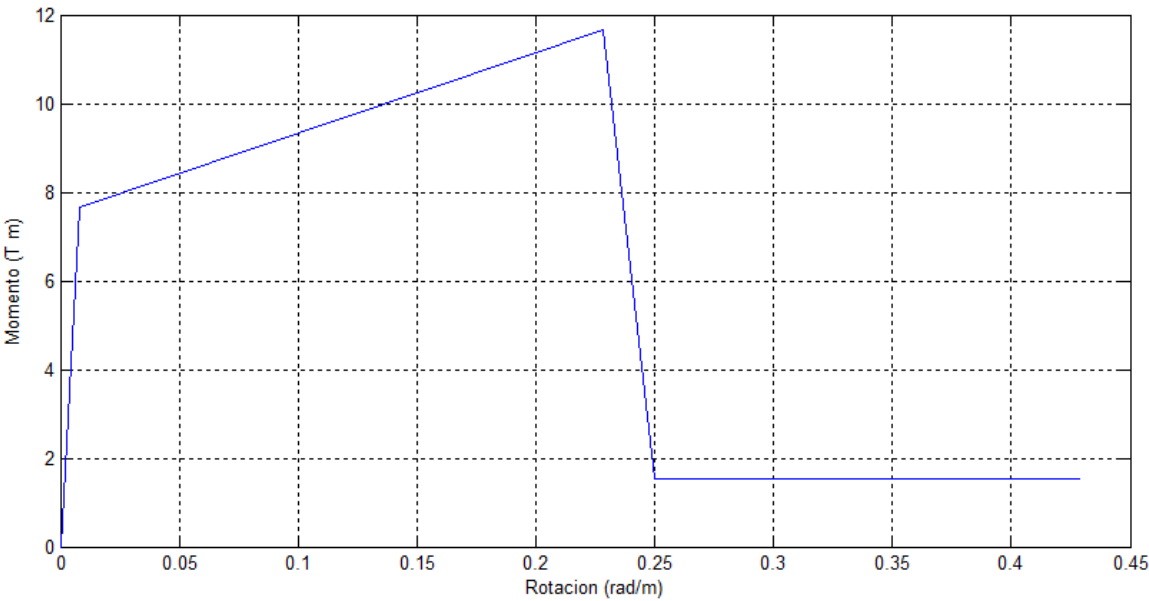


Figura 8 Diagrama momento curvatura de acuerdo al ASCE 41

4. RELACIONES PARA COLUMNAS DE HORMIGÓN

En forma similar a las vigas, hay tres controles que se deben realizar, antes de ingresar a la tabla 2 para encontrar los coeficientes *a, b, c* con los cuales se halla el diagrama momento rotación. El primer control es calcular la relación:

$$\frac{P}{A_g f'_c}$$

Donde *P* es la carga axial; *A<sub>g</sub>* es el área de la sección transversal de la columna y *f'<sub>c</sub>* es la resistencia máxima del hormigón a compresión. El segundo control tiene que ver con el confinamiento y el tercero con el cortante actuante; estos dos controles se realizan en forma similar a la indicada para vigas.

Si la columna está controlada por corte, última fila de la tabla 2, no se puede obtener los coeficientes *a, b, c*.

Tabla 2 Parámetros y criterios de aceptación para procedimientos no lineales en columnas de hormigón armado.

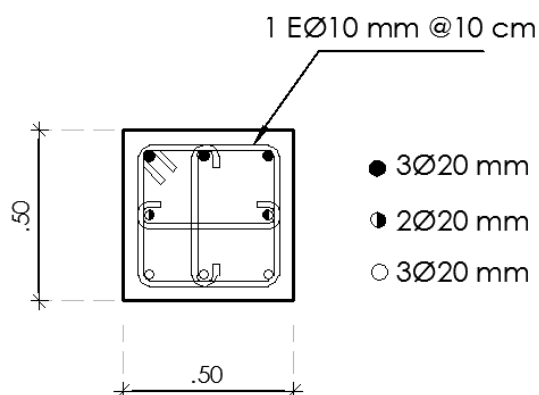
ii.i)	Columnas controladas por flexión	a	b	c
-------	----------------------------------	---	---	---

$\frac{P}{A_g f'_c}$	Refuerzo Transversal	$\frac{V(Ksi)}{b_w(in)d(in)\sqrt{f'_c(ksi)}}$			
$\leq 0.1$	Confinado	$\leq 3$	0.0 2	0.0 3	0. 2
$\leq 0.1$	Confinado	$\geq 6$	0.0 16	0.0 24	0. 2
$\geq 0.4$	Confinado	$\leq 3$	0.0 15	0.0 25	0. 2
$\geq 0.4$	Confinado	$\geq 6$	0.0 12	0.0 2	0. 2
$\leq 0.1$	No Confinado	$\leq 3$	0.0 06	0.0 15	0. 2
$\leq 0.1$	No Confinado	$\geq 6$	0.0 05	0.0 12	0. 2
$\geq 0.4$	No Confinado	$\leq 3$	0.0 03	0.0 1	0. 2
$\geq 0.4$	No Confinado	$\geq 6$	0.0 02	0.0 08	0. 2
<b>ii.ii) Columnas controladas por corte</b>					
Espaciamiento de estribos $\leq \frac{d}{2}$ , o $\frac{P}{A_g f'_c} \leq 0.1$			No se permitirá		

### • Ejemplo 3

La columna indicada en la figura 9 es cuadrada de 50 cm., de lado; armada con 8 varillas longitudinales de 20 mm., de diámetro y el refuerzo transversal es de 1  $\emptyset$  de 10 mm., espaciado cada 10 cm., incluye adicionalmente una vincha en cada dirección del mismo diámetro. La resistencia del hormigón es  $f'_c = 240 \text{ kg/cm}^2$ . y el acero es A 36. El módulo de elasticidad del hormigón es  $1500000 \text{ T/m}^2$ , del acero  $20430000 \text{ T/m}^2$ . Se pide:

- Determinar la rigidez axial y a flexión en el rango elástico.
- Si la carga axial  $P = 20 \text{ T}$  y el cortante es  $V = 2 \text{ T}$ . Determinar los coeficientes  $a, b, c$  de la tabla 2.
- Detallar el cálculo del momento y curvatura de fluencia.



**Figura 9** Geometría de columna de Ejemplo 3.

• **Solución**

i) Rigidez axial y a flexión

$$A = 0.50 * 50 = 0.25 m^2$$

$$I = \frac{0.50 * 50^3}{12} = 0.0052 m^4$$

La rigidez axial  $EA$  y a flexión  $EI$ , valen:

$$EA = 375000 T.$$

$$EI = 7812.50 T/m$$

ii) Factores  $a, b, c$ , de tabla 2.

$$\frac{P}{A_g f'_c} = \frac{20.00}{0.25 * 2400} = 0.0333$$

$$\frac{V}{b d \sqrt{f'_c}} = \frac{2.0}{0.5 * 0.44 * \sqrt{240}} * 1.1926 = 0.2213 \frac{Pound}{in}$$

Verificación de confinamiento de la sección

$$A_v = 3\phi 10 mm = 2.35 cm^2$$

$$V_s = \frac{2.35 * 4200 * 44}{10} = 43.43 T$$

$$s \leq \frac{d}{3} = 10 \leq 14.66 \quad V_s > \frac{3}{4} V = 43.43 > 1.5$$



Al cumplir las condiciones de confinamiento de la sección, se selecciona los valores de  $a, b, c$ , de la Tabla 2.

$$a = 0.020 \quad b = 0.030 \quad c = 0.200$$

iii) Detallar el cálculo del momento y curvatura de fluencia.

Al utilizar las ecuaciones de Y. Park (1985) se halla que el momento y curvatura de fluencia valen:

$$M_Y = 27.2074 \text{ T m} \quad \phi_Y = 0.010 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

Se calcula la Rotación de fluencia con la formula mencionada anteriormente

$$\theta_Y = \frac{3.00 * 27.2074}{6 * 7812.50} = 0.0017 \text{ rad}$$

Con estos valores se halla el diagrama momento rotación de acuerdo al

ASCE 41

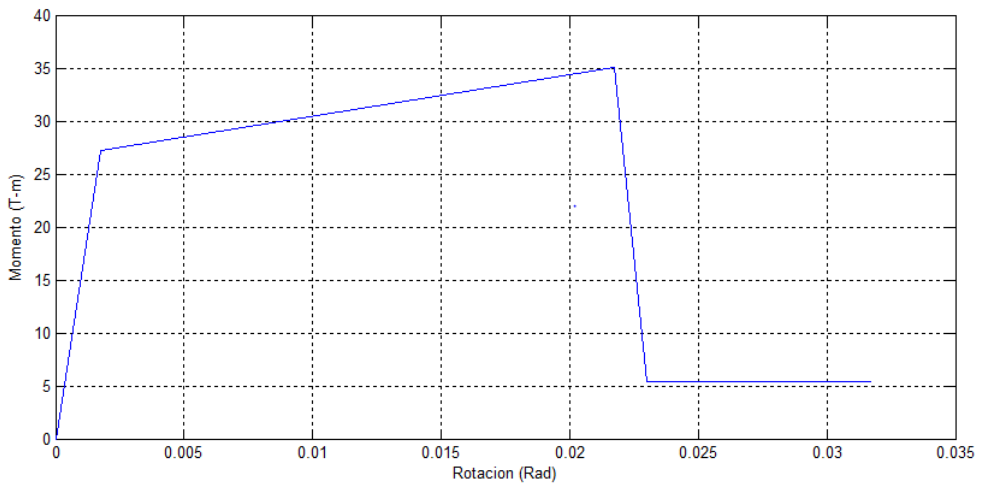
$$\theta_U = \theta_Y + a = 0.0017 + 0.020 = 0.0217 \text{ rad}$$

$$\theta_R = \theta_Y + b = 0.0017 + 0.03 = 0.0317 \text{ rad}$$

$$M_U = M_Y + 0.05 EI (\theta_U - \theta_Y)$$

$$M_U = 27.2074 + 0.05 * 7812.50 * (0.0217 - 0.0017) = 35.02 \text{ T m}$$

$$M_R = c M_Y = 0.20 * 27.2074 = 5.4415 \text{ T m}$$



**Figura 10** Diagrama momento rotación de acuerdo al ASCE 41

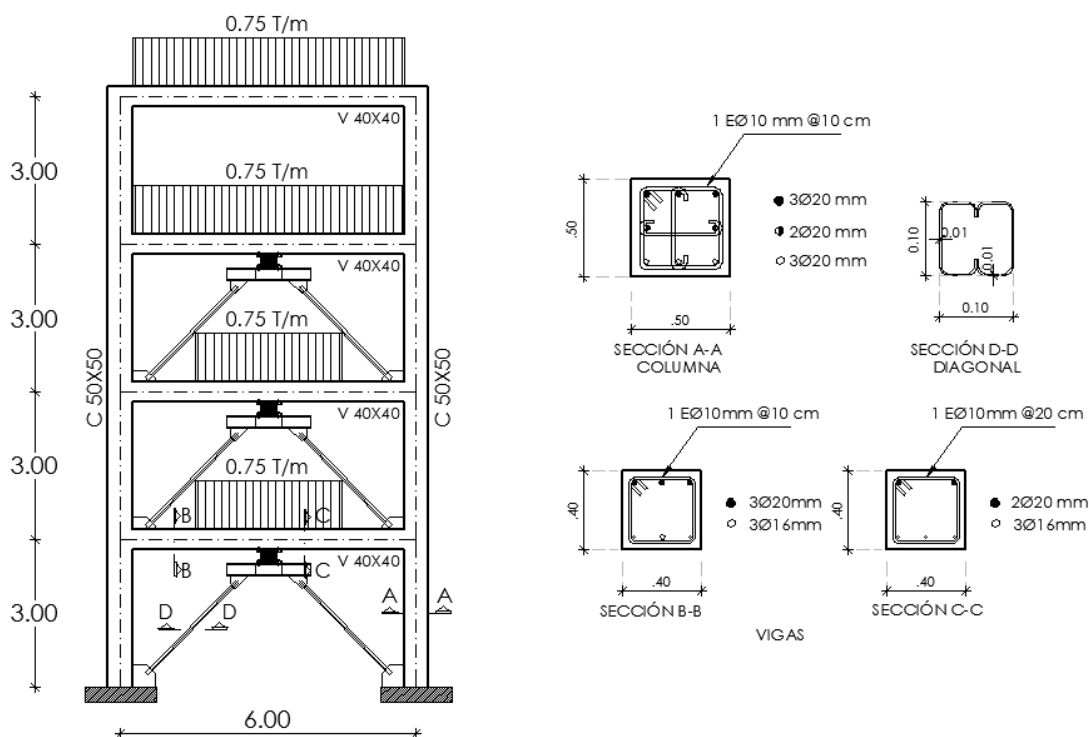
## 5. ESTRUCTURA DE HORMIGÓN ARMADO CON DISIPADORES

Una forma eficiente de reforzar estructuras es mediante la colocación de disipadores de energía, razón por la cual se han desarrollado una gran variedad de estos dispositivos de control pasivo. Tena (2000).

Dentro de esta gran variedad se tienen los disipadores por fluencia del material y aquí se tiene otra serie de sistemas de control. (Nuzzo *et al.* 2015). De tal manera que el tema ha sido ampliamente investigado por la bondad que estos representan para las estructuras.

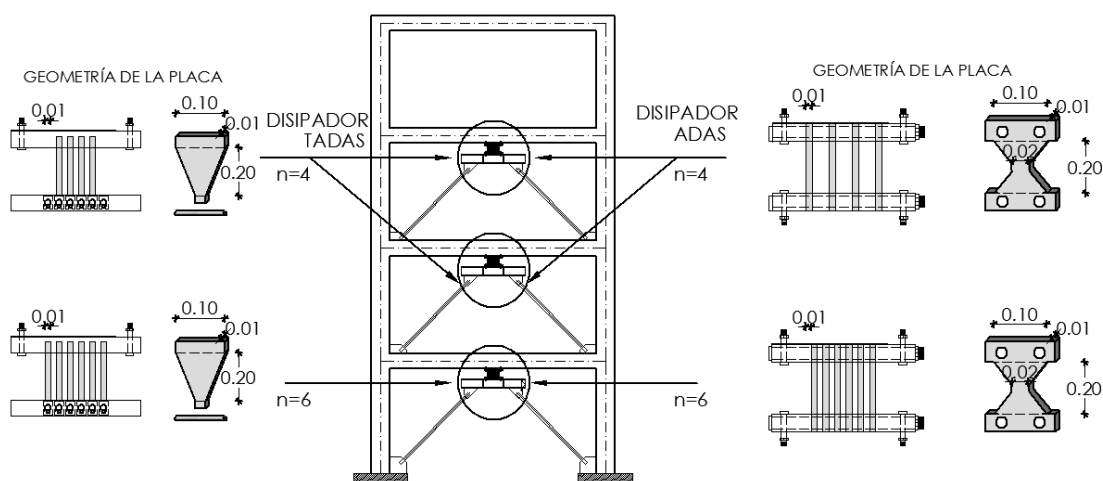
En este artículo se presentan dos tipos de disipadores de energía por fluencia del material y son los denominados ADAS y TADAS (Tena, 1997; Withaker *et al.*, 1989; Aguiar *et al.*, 2015,1). Los mismos que se encuentran colocados sobre contravientos de acero en forma de "V" invertida. Concretamente en este apartado se ilustrará como se halla el modelo constitutivo para los elementos de acero, tanto para el caso de compresión como para el caso de tracción y en el siguiente apartado se hará lo propio con los disipadores.

A la izquierda de la figura 11, se muestra un pórtico plano de hormigón armado de 4 pisos; las dimensiones y armadura de las vigas y columnas se indican a la derecha de ésta gráfica y son las que han servido de base para la realización de los ejemplos 1 a 3.



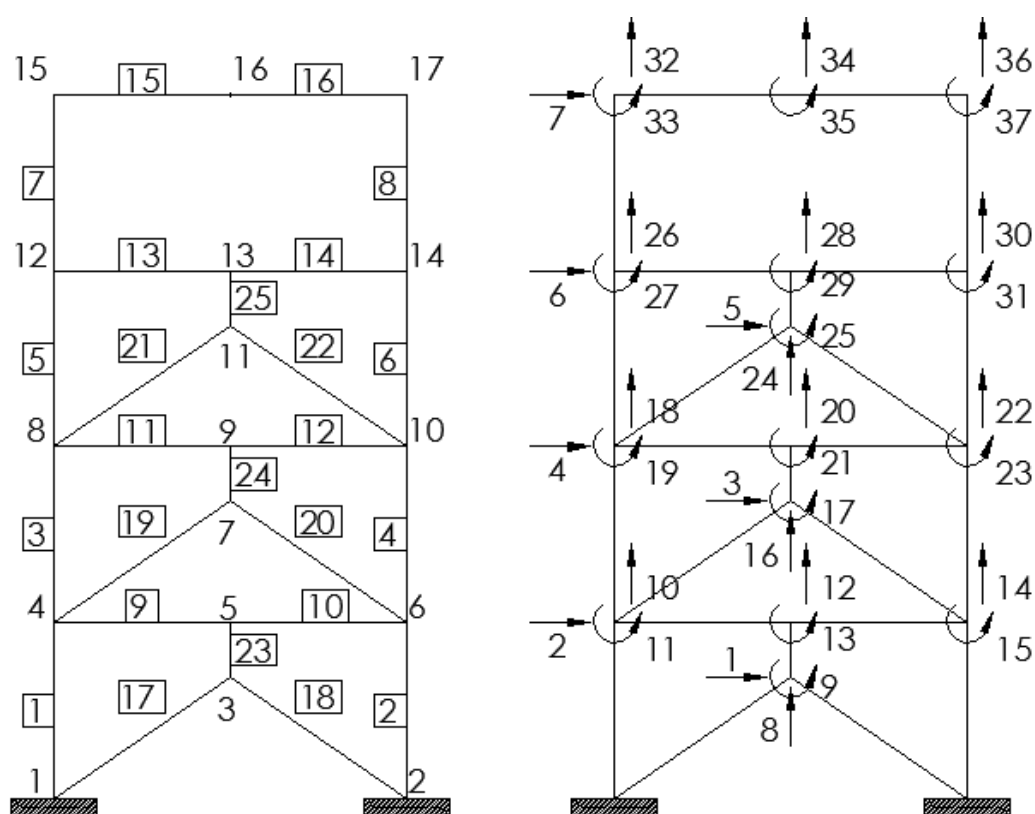
**Figura 11** Geometría de un pórtico plano de 4 pisos de hormigón armado, con disipadores de energía colocados sobre contraviento Chevrón.

En la figura 12 se indica la geometría de los disipadores de energía colocados, a la izquierda de ésta gráfica se indican los TADAS y a la derecha los ADAS; los disipadores del primer piso son diferentes, tienen 6 placas de acero y los disipadores de los pisos dos y tres son iguales, tienen 4 placas de acero. Las diagonales son de acero compuestas por un perfil tubular cuadrado de 100/100/10 mm., como se indica en la parte superior derecha de la figura 11.



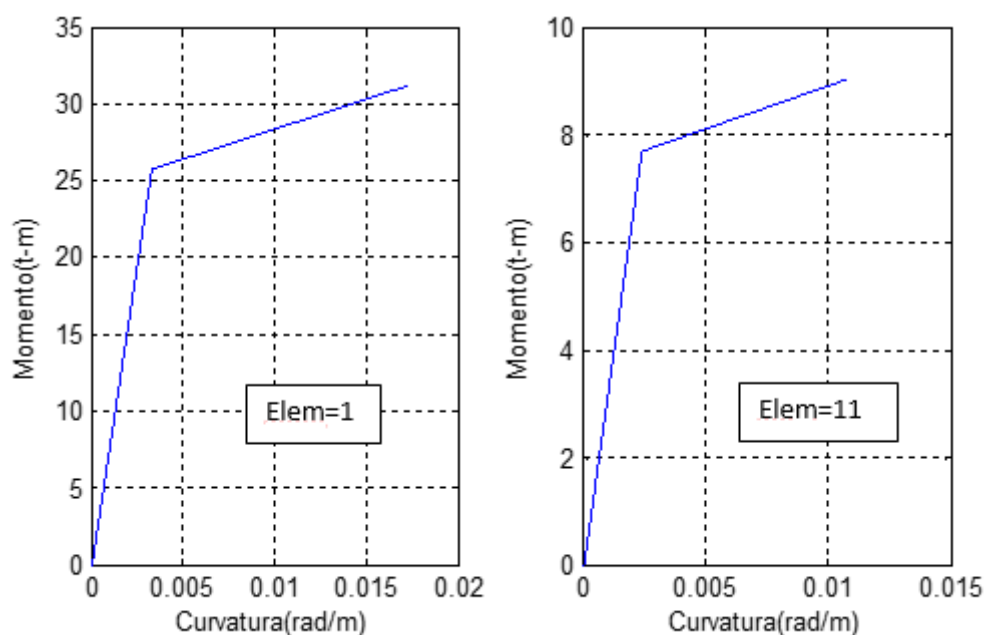
**Figura 12** Geometría de los disipadores TADAS a la izquierda y ADAS a la derecha.

En la figura 13, se presenta a la izquierda la numeración de los nudos y elementos. Nótese que al disipador se modela como un elemento corto y que las coordenadas principales van del 1 al 7. (Gráfico que está a la derecha de la figura 13).



**Figura 13** Numeración de nudos, elementos y grados de libertad.

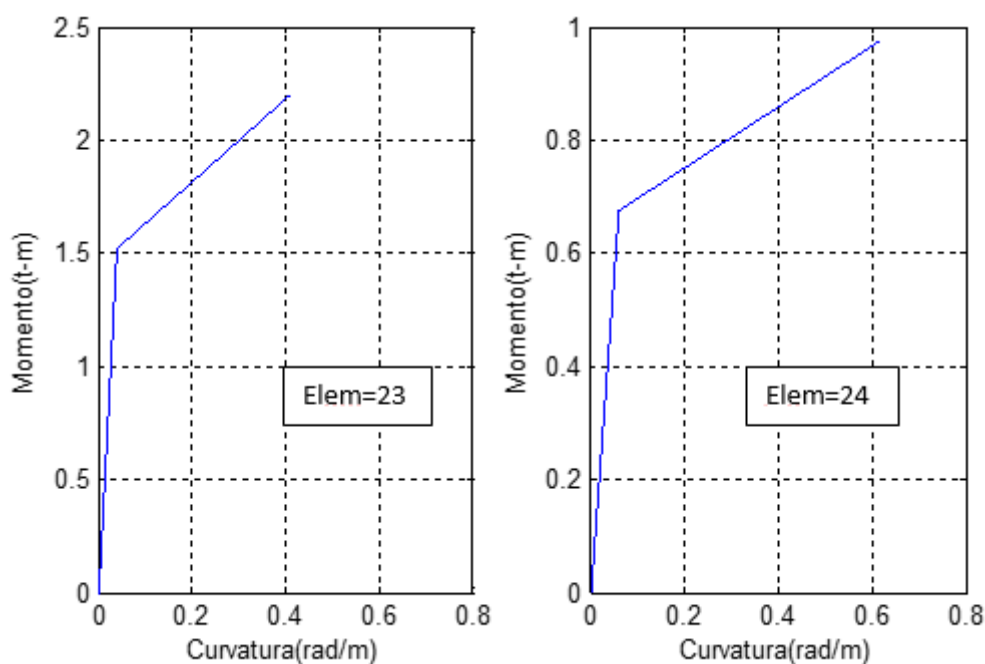
En la figura 14 se indica los diagramas momento-curvatura, hallados en la columna 1 y en la viga 13 (ver figura 13) considerando un valor de  $\alpha = 0.05$  (relación entre rigidez post fluencia con respecto a rigidez elástica) y una ductilidad de curvatura de  $\mu_\phi = 10$ .



**Figura 14** Diagramas momento-curvatura de una columna y una viga de hormigón armado.

En la figura 15 se presenta el diagrama momento curvatura hallado para los disipadores, en la cara superior, son iguales para el ADAS y TADAS; debido a que los dos en la cara superior tienen un ancho  $b = 10 \text{ cm.}$ , y una altura de la sección transversal  $t = 1 \text{ cm.}$  En base a estas dos dimensiones: 10/1 cm., se determinó el punto de fluencia, teniendo en cuenta que es de acero el elemento y para el punto U. se trabajó con el mismo  $\alpha = 0.05$  y la misma ductilidad de curvatura,  $\mu_\phi = 10$ , debido a que el objetivo es presentar ejemplos del diagrama momento curvatura.

Por la geometría de los disipadores se espera que el daño se produzca en todo la placa de tal manera que el diagrama momento curvatura indicado en la figura 15 se aplica a todo el elemento disipador.



**Figura 15** Diagrama momento curvatura para elemento disipador en la cara superior

#### • Ejemplo 4

Determinar el modelo constitutivo fuerza-desplazamiento, para la diagonal de acero del contraviento de la estructura de la figura 10, que es de 100/100/10 mm., y tiene una longitud de 3.80 m., si  $\alpha = 0.05$  y la ductilidad  $\mu_{\Delta} = 10$ . Presentar el modelo constitutivo para:

- i) El elemento trabajando a compresión.
- ii) El elemento trabajando a tracción.

En la tabla 3 se indican las propiedades del perfil tubular de 100/100/10 mm.

**Tabla 3** Propiedades geométricas de un perfil tubular de 100/100/10 mm

Propiedad geométrica	Variable	Valor
Radio de giro	$r$	3.6968 cm.
Área	$A$	36 cm <sup>2</sup>
Momento de Inercia	$I$	492 cm <sup>4</sup>
Momento Estático	$z$	122 cm <sup>3</sup>

#### • Solución

- i) Elemento a compresión

$$\frac{L}{r} = \frac{3.80}{0.036968} = 102.79 \quad \rightarrow F_{cr} = 12 * 703.069 = 8436.8 \frac{T}{m^2}$$

$$P_{CL} = A * F_{cr} = 0.0036 * 8436.8 = 30.3725 T.$$

$$P_C = A_s * f_y = 0.0036 * 25300 = 91.08 T.$$

$$P_Y = \min(P_{CL}, P_C) = 30.3725 T.$$

$$EA = 20430000 * 0.0036 = 73548 T$$

$$\Delta_{CY} = \frac{30.3725}{73548} = 0.00041296 m$$

$$\Delta_{CU} = 10 \Delta_{CY} = 0.0041296 m$$

$$P_U = P_Y + \alpha EA (\Delta_{CU} - \Delta_{CY}) = 30.37 + 0.05 * 73548 * (0.0041296 - 0.00041296) = 44.04 T$$

ii) Elemento a tracción

$$P_Y = 91.08 T.$$

$$\Delta_{TY} = \frac{91.08}{73548} = 0.0012 m.$$

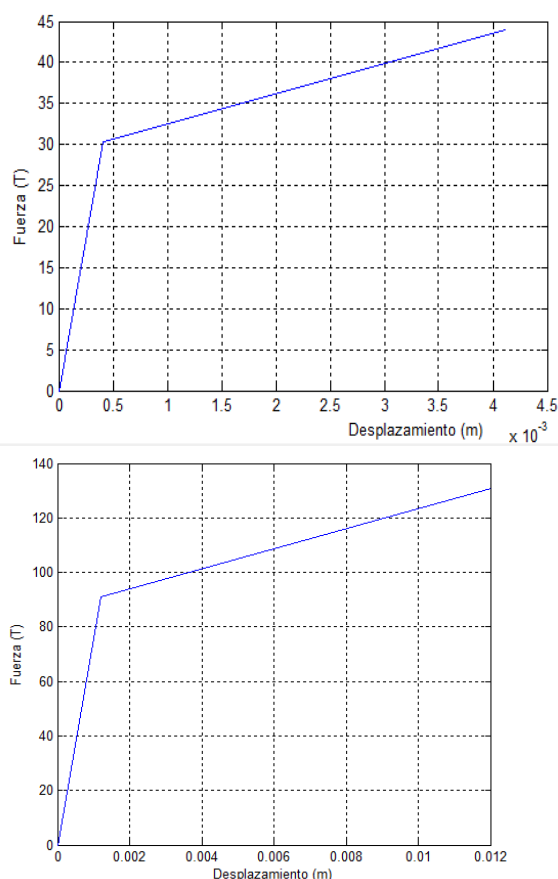
$$\Delta_{TU} = 10 \Delta_{TY} = 10 * 0.0012 = 0.012 m$$

$$P_U = P_Y + \alpha EA (\Delta_{TU} - \Delta_{TY}) = 91.08 + 0.05 * 73548 * (0.012 - 0.0012) = 130.79 T$$

En la tabla 4 se resumen los valores encontrados y en la figura 15 se presentan los modelos constitutivos, a la izquierda para compresión y a la derecha para tracción.

**Tabla 4** Punto notables del diagrama bilineal fuerza-desplazamiento, para diagonal de acero.

Punto Notable	Compresión	Tracción
Fuerza de fluencia (T.)	30.37	91.08
Desplazamiento de fluencia (m.)	0.00041	0.0012
Fuerza última (T.)	44.04	130.79
Desplazamiento último (m.)	0.00412	0.012



**Figura 16 Modelos constitutivos fuerza desplazamiento para diagonal que trabaja a compresión o tracción.**

## 6. ELEMENTOS DE ACERO

En la tabla 5 se presenta la propuesta del ASCE 41 para hallar el diagrama momento-rotación a partir del punto de fluencia; la parte superior corresponde a las vigas y la parte inferior a las columnas. En el sistema de computación **CEINCI-LAB** se programó las secciones indicadas en la figura 16, el significado de las variables, en forma general es el siguiente:  $b_f$ ,  $t_f$ , es el ancho y espesor del patín;  $h$  es la altura del perfil;  $t_w$  es el ancho del alma en los perfiles 1 y 2 o es el ancho del perfil tubular.

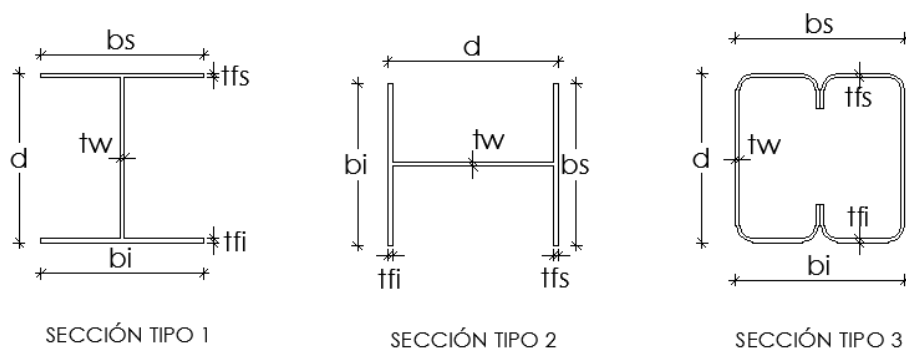
**Tabla 5 Parámetros y criterios de aceptación para procedimientos no lineales en vigas y columnas de acero.**

Vigas - Flexión	A	b	c
a. $\frac{b_f}{2t_f} \leq \frac{52}{\sqrt{f_{ye}}}$ y $\frac{h}{t_w} \leq \frac{418}{\sqrt{f_{ye}}}$	$9\theta_y$	$11\theta_y$	0.6
b. $\frac{b_f}{2t_f} \geq \frac{65}{\sqrt{f_{ye}}}$ o $\frac{h}{t_w} \geq \frac{640}{\sqrt{f_{ye}}}$	$4\theta_y$	$6\theta_y$	0.2



c. Otros	Interpolación lineal, se usará el resultado menor.		
<b>Columnas - Flexión</b>	<b>A</b>	<b>b</b>	<b>c</b>
Para $P/P_{CL} < 0.2$			
a. $\frac{b_f}{2t_f} \leq \frac{52}{\sqrt{f_{ye}}} \text{ y } \frac{h}{t_w} \leq \frac{300}{\sqrt{f_{ye}}}$	$9\theta_y$	$11\theta_y$	0.6
b. $\frac{b_f}{2t_f} \geq \frac{65}{\sqrt{f_{ye}}} \text{ o } \frac{h}{t_w} \geq \frac{460}{\sqrt{f_{ye}}}$	$4\theta_y$	$6\theta_y$	0.2
c. Otros	Interpolación lineal, se usará el resultado menor.		
Para $0.2 \leq P/P_{CL} \leq 0.5$			
a. $\frac{b_f}{2t_f} \leq \frac{52}{\sqrt{f_{ye}}} \text{ y } \frac{h}{t_w} \leq \frac{260}{\sqrt{f_{ye}}}$	$11 \left(1 - \frac{5}{3} \frac{P}{P_{CL}}\right) \theta_y$	$17 \left(1 - \frac{5}{3} \frac{P}{P_{CL}}\right) \theta_y$	0.6
b. $\frac{b_f}{2t_f} \geq \frac{65}{\sqrt{f_{ye}}} \text{ o } \frac{h}{t_w} \geq \frac{400}{\sqrt{f_{ye}}}$	$1\theta_y$	$1.5\theta_y$	0.2
c. Otros	Interpolación lineal, se usará el resultado menor.		

\* Columnas con  $P/P_{CL} > 0.5$  deberán ser controladas por fuerza axial.



**Figura 17** Secciones de acero consideradas en el sistema **CEINCI-LAB**

Para ingresar a la tabla 5 se deben controlar algunas relaciones geométricas como  $\frac{b_f}{2t_f}$  no hay problema con las unidades pero en las relaciones donde interviene  $f_{ye}$  se debe colocar la fluencia del acero en ksi. Cuando se trabaja con un acero A 36, el valor de  $f_{ye} = 36 \text{ ksi}$ .

La parte inferior de la tabla 5, corresponde a **columnas** (flexo compresión) y primero se debe controlar la relación  $\frac{P}{P_{CL}}$ , donde  $P$  es la carga axial que gravita en la columna y  $P_{CL}$  es la carga crítica de pandeo. Cuando la relación  $\frac{P}{P_{CL}} > 0.5$  debe calcularse como elementos sujetos solo a fuerza axial.

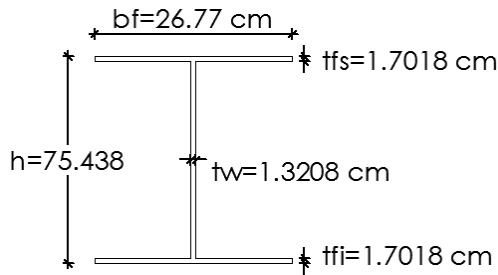
Una vez que se ha clasificado de acuerdo al valor de  $\frac{P}{P_{CL}}$ , se pasa a controlar los parámetros relacionados con la geometría de la sección, en forma

similar a lo que se hizo con las vigas y nuevamente es probable que se tenga que interpolar.

### • Ejemplo 5

El perfil de acero A 36, indicado en la figura 18 es W 30x99 y tiene un momento de inercia  $I = 1660.76 \text{ cm}^4$ , un momento estático  $z = 5122.8 \text{ cm}^3$ ; tiene una longitud  $L = 7.315 \text{ m}$ . Se pide:

- Encontrar el diagrama momento rotación, empleando la recomendación del ASCE 41. Considerar  $\alpha = 0.03$  (relación de rigidez post fluencia con respecto a la elástica).
- Hallar el diagrama momento curvatura para una longitud plástica  $L_p = 0.15 \text{ m}$ .



**Figura 18** Perfil W 30x99 de Ejemplo 5.

### • Solución

- Relación momento rotación

$$\frac{bf}{2t_f} = \frac{26.77}{2 * 1.7918} = 7.6390 \qquad \frac{52}{\sqrt{f_{ye}}} = \frac{52}{\sqrt{36}} = 8.6667$$

$$\frac{h}{t_w} = \frac{75.438}{1.3208} = 57.1154 \qquad \frac{300}{\sqrt{f_{ye}}} = \frac{300}{\sqrt{36}} = 50.00$$

Al calcular los parámetros que se hallan en la tabla 5 se puede determinar que para el caso a) cumple con la primera relación pero no con la segunda.

$$\frac{b_f}{2t_f} \leq \frac{52}{\sqrt{f_{ye}}} \text{ pero } \frac{h}{t_w} > \frac{300}{\sqrt{f_{ye}}}$$

Así que, probaremos con el caso b)

$$\frac{65}{\sqrt{f_{ye}}} = \frac{65}{\sqrt{36}} = 10.8333$$

$$\frac{460}{\sqrt{f_{ye}}} = \frac{460}{\sqrt{36}} = 76.6667$$

Para el caso b) no cumple con ninguna relación por lo que se tendrá que realizar una interpolación lineal para encontrar las relaciones.

$$\frac{b_f}{2t_f} < \frac{65}{\sqrt{f_{ye}}} \quad y \quad \frac{h}{t_w} < \frac{460}{\sqrt{f_{ye}}}$$

**Tabla 6 Interpolación lineal para los parámetros A,b y c**

A	b	c	
$9\theta_y$	$11\theta_y$	0.6	50.00
$7.6659 \theta_y$	$9.6659 \theta_y$	0.4933	57.1154
$4\theta_y$	$6\theta_y$	0.2	76.6667

$$\theta_y = \frac{7.315 * 0.0051128 * 25300}{6 * 20'430000 * 0.00166076} = 0.0046 \text{ rad}$$

$$\theta_U = 7.6659 \theta_y = 0.0356 \text{ rad}$$

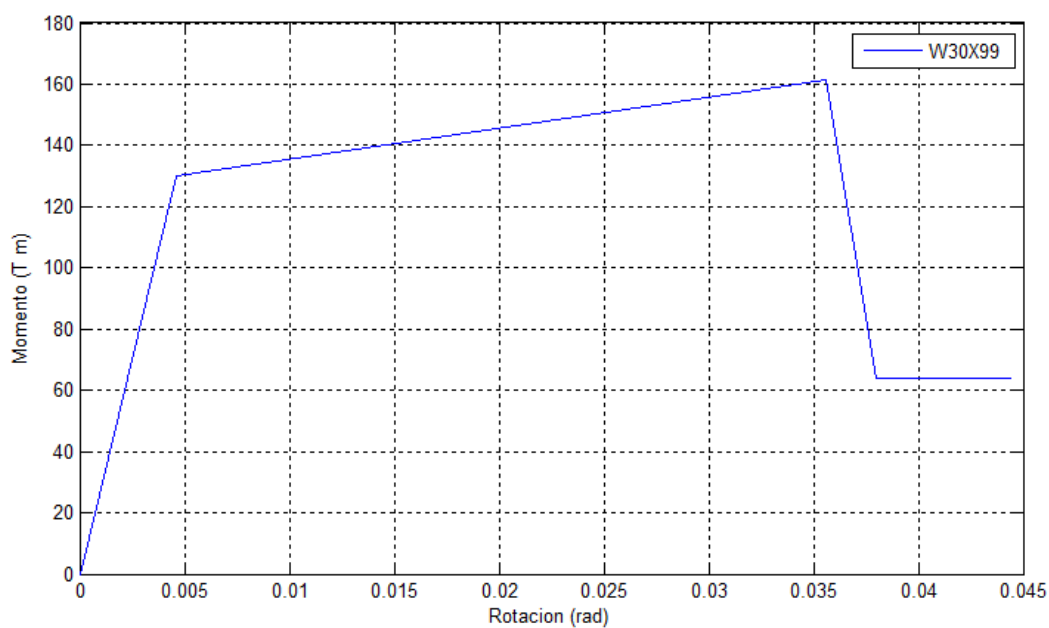
$$M_Y = z * f_y = 0.0051128 * 25300 = 129.9538 \text{ T m}$$

$$M_U = M_Y + 0.03 EI (\theta_U - \theta_Y)$$

$$M_U = 129.9538 + 0.03 * 20'430000 * 0.00166076 (0.0356 - 0.0046) = 161.508 \text{ T m}$$

$$M_R = c M_Y = 0.4933 * 129.9538 = 64.1062 \text{ T m}$$

$$\theta_R = 9.6659 \theta_y = 0.0445 \text{ rad}$$

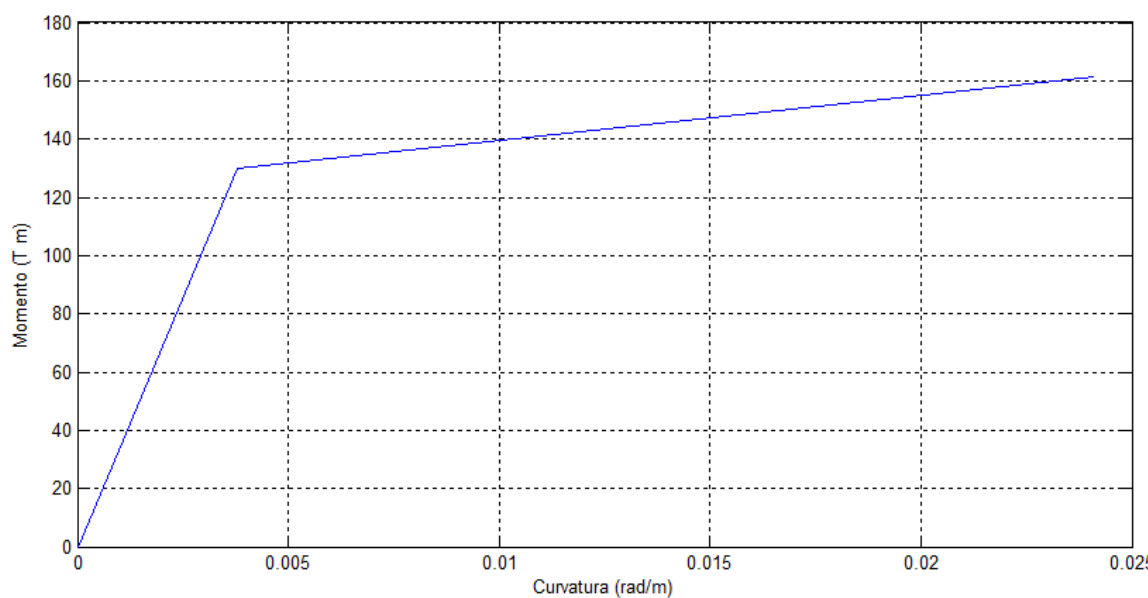


**Figura 19** Diagrama momento rotación de perfil W 30x99.

ii) Relación momento curvatura

$$\phi_Y = \frac{M_Y}{EI} = \frac{129.9538}{20'430000 * 0.00166076} = 0.0038 \frac{rad}{m}$$

$$\phi_U = \phi_Y + \frac{\theta_U}{L_p} = 0.0038 + \frac{0.0356}{0.15} = 0.2411 \frac{rad}{m}$$

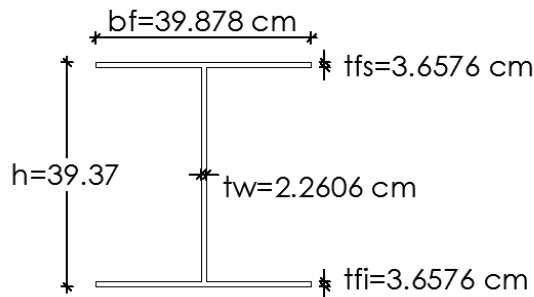


**Figura 20** Diagrama momento curvatura bilineal de ejemplo 5.

- **Ejemplo 6**

En la figura 21 se presenta un perfil W 14x193 de acero A 36 con el cual se ha construido una columna que tiene una altura de 3.81 m., sobre la que gravita una carga axial de  $P = 100\text{ T}$ . El momento de inercia  $I = 99896\text{ cm}^4$ ; el momento estático  $z = 5817.4\text{ cm}^3$ ; un radio de giro  $r = 0.1651\text{ m}$ . Se pide:

- Encontrar la relación momento rotación, para un factor  $\alpha = 0.03$  (relación entre rigidez post fluencia con respecto a elástica).
- Hallar la relación momento curvatura, de un modelo bilineal, para una longitud plástica  $L_p = 0.15\text{ m}$ .

**Figura 21** Perfil W 14x193 de ejemplo 6.

- **Solución**

- Relación momento rotación

$$\frac{L}{r} = \frac{3.810}{0.1651} = 23.0769 \rightarrow F_{cr} = 12 * 703.069 = 8444.3 \frac{T}{m^2}$$

$$P_{CL} = A * F_{cr} = 0.036645 * 8444.3 = 309.4414\text{ T.}$$

$$\frac{P}{P_{CL}} = \frac{100.00}{309.4414} = 0.3222$$

$$0.2 \leq \frac{P}{P_{CL}} \leq 0.5$$

$$\frac{bf}{2tf} = \frac{39.878}{2 * 3.6576} = 5.4514$$

$$\frac{52}{\sqrt{f_{ye}}} = \frac{52}{\sqrt{36}} = 8.6667$$

$$\frac{h}{t_w} = \frac{39.37}{2.2606} = 17.4157$$

$$\frac{260}{\sqrt{f_{ye}}} = \frac{260}{\sqrt{36}} = 43.333$$

Al calcular los parámetros que se hallan en la tabla 5 se puede determinar que cumple para el caso a), para lo cual se tiene las siguientes expresiones para los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$

$$\frac{b_f}{2t_f} \leq \frac{52}{\sqrt{f_{ye}}} \text{ pero } \frac{h}{t_w} < \frac{3600}{\sqrt{f_{ye}}}$$

$$a = 11 \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{P}{P_{CL}} \right) \theta_y = 11 \left( 1 - \frac{100}{309.4414} \right) \theta_y = 5.0753 \theta_y$$

$$b = 17 \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{P}{P_{CL}} \right) \theta_y = 17 \left( 1 - \frac{100}{309.4414} \right) \theta_y = 7.8437 \theta_y$$

$$c = 0.60$$

$$\theta_y = \frac{L z f_y}{6EI} \left( 1 - \frac{P}{P_{CL}} \right) = \frac{3.81 * 0.0058174 * 25300}{6 * 20'430000 * 0.00099896} \left( 1 - \frac{100}{309.4414} \right) = 0.0031 \text{ rad}$$

$$\theta_U = 5.0753 * 0.0031 = 0.0157 \text{ rad}$$

$$\theta_R = 7.8437 * 0.0031 = 0.0243 \text{ rad}$$

$$M_Y = z * f_y = 0.0058174 * 25300 = 147.1802 \text{ T m}$$

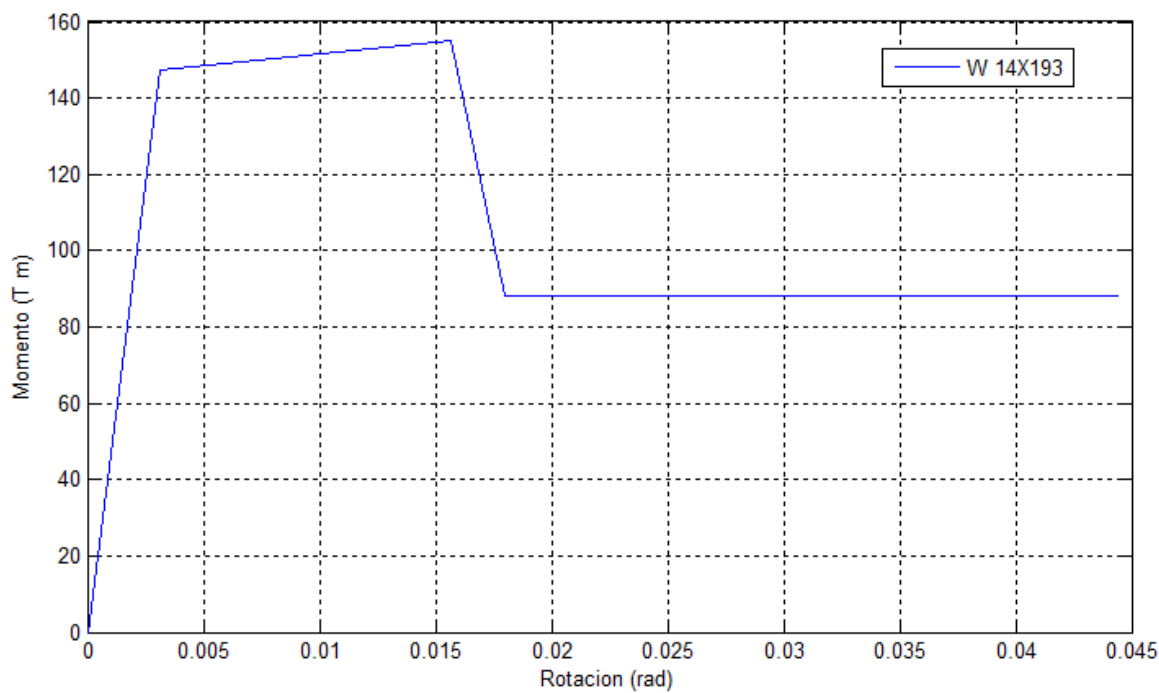
$$M_U = M_Y + 0.03 EI (\theta_U - \theta_Y)$$

$$M_U = 147.1802 + 0.03 * 20'430000 * 0.00099896 (0.0157 - 0.0243)$$

$$= 154.8947 \text{ T m}$$

$$M_R = c M_Y = 0.6 * 147.1802 = 88.3081 \text{ T m}$$

$$\theta_R = 9.6659 \theta_y = 0.0445 \text{ rad}$$

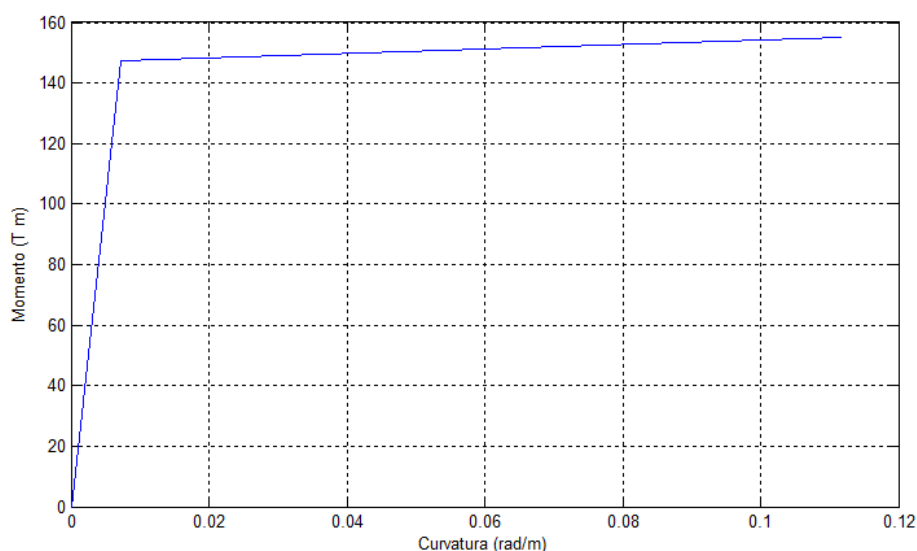


**Figura 22** Diagrama momento rotación de perfil W 14x193 con una carga axial de 100 T.

ii) Relación momento curvatura

$$\phi_Y = \frac{M_Y}{EI} = \frac{147.1802}{20'430000 * 0.00099896} = 0.0072 \frac{rad}{m}$$

$$\phi_U = \phi_Y + \frac{\theta_U}{L_p} = 0.0072 + \frac{0.0157}{0.15} = 0.1119 \frac{rad}{m}$$



**Figura 23** Diagrama momento curvatura bilineal de ejemplo 6.

## 7. DIAGONALES RIGIDIZADORAS DE ACERO

En la tabla 7 se presentan los valores de  $a, b, c$ , con los cuales se halla el diagrama momento-rotación de diagonales rigidizadoras, de acero, que se encuentran trabajando a compresión o a tracción. En este caso el criterio de control viene dado por la longitud efectiva de pandeo  $kl$  para el caso de las diagonales que trabajan a compresión.

Donde  $K$  es el factor de longitud efectiva y  $r$  es el radio de giro del perfil. El procedimiento se debe verificar si el elemento es compacto o no para lo cual existen las primeras expresiones.

**Tabla 7** Parámetros y criterios de aceptación para procedimientos no lineales de diagonales rigidizadoras de acero.

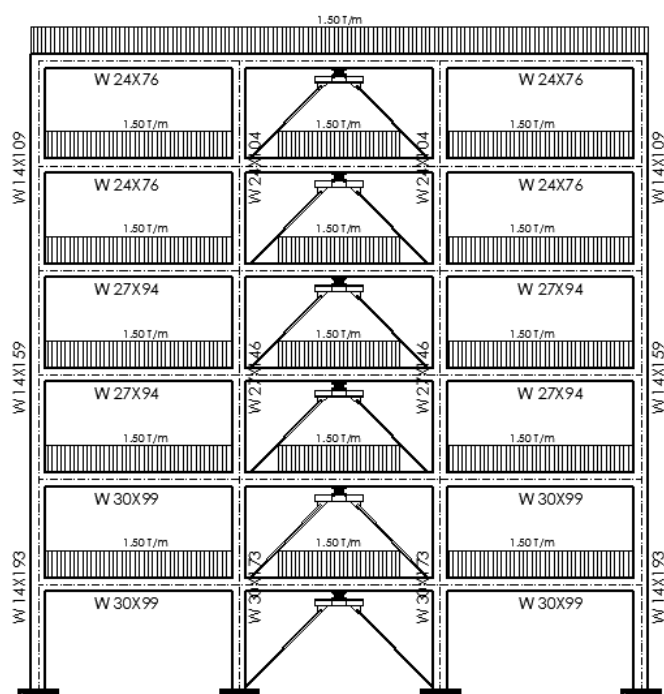
Diagonal Rigidizadora en Compresión	A	b	c
a. Para Secciones Esbeltas $kl/r \geq 4.2\sqrt{E/fy}$			
1. Secciones W,I,2L,2C en plano	$0.5\Delta_c$	$10\Delta_c$	0.3
2. 2L, 2C fuera de plano	$0.5\Delta_c$	$9\Delta_c$	0.3
3. HSS, Tubos redondos y rectangulares	10.5	79	0.3
b. Para Secciones compactas			



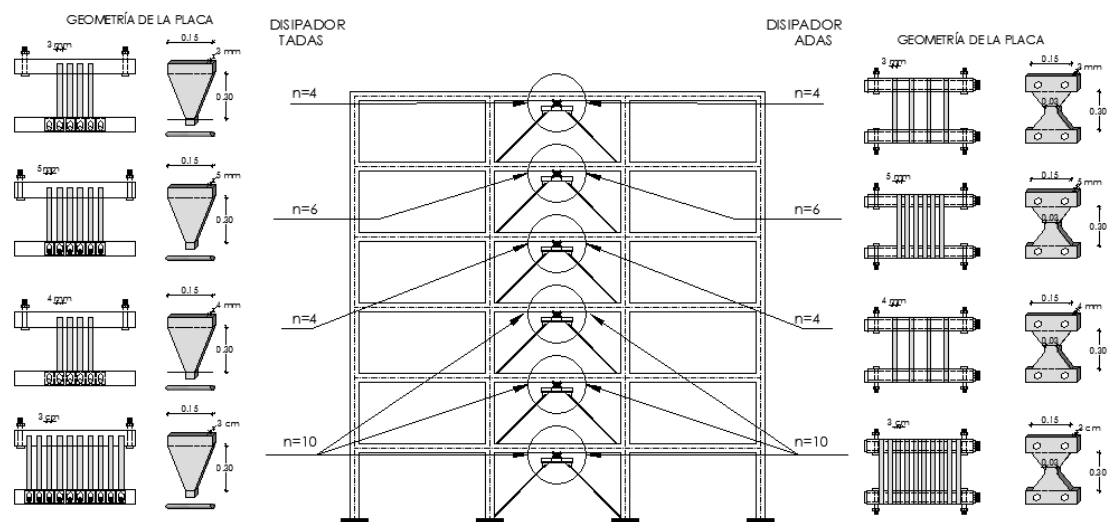
$Kl/r \leq 2.1\sqrt{E/f_y}$			
1. Secciones W,I,2L,2C en plano	$1\Delta_c$	$8\Delta_c$	0.5
2. 2L, 2C fuera de plano	$1\Delta_c$	$7\Delta_c$	0.5
3. HSS, Tubos redondos y rectangulares	$1\Delta_c$	$7\Delta_c$	0.5
<b>Diagonal Rigidizadora en Tensión</b>	$11\Delta_T$	$14\Delta_T$	0.8
<b>Vigas, Columnas en tensión</b>	$5\Delta_T$	$7\Delta_T$	1.0

## 8. ESTRUCTURA DE ACERO CON DISIPADORES DE ENERGÍA

En la figura 24 se presenta una estructura de acero, de seis pisos, que tiene luces iguales de 7.315 m., y altura de entrepisos, también iguales de 3.81 m., con disipadores de energía sobre contravientos en forma de “V” invertida. En el ejemplo 5 se analizó una viga W 30x99 y en el ejemplo 6, una columna W 14x193. La estructura se analizó con disipadores TADAS, que se muestran a la izquierda de la figura 25 o ADAS que están a la derecha, de la mencionada figura 23. (Aguilar *et al.* 2015, 2).



**Figura 24** Estructura de acero con disipadores de energía sobre contravientos Chevrón.



**Figura 25** Descripción de los disipadores de energía.

En la figura 26 se muestra a la izquierda la numeración de nudos y elementos. A la derecha en cambio se indican los grados de libertad, en este caso se tiene 84 grados de libertad de los cuales los 12 primeros son coordenadas principales.

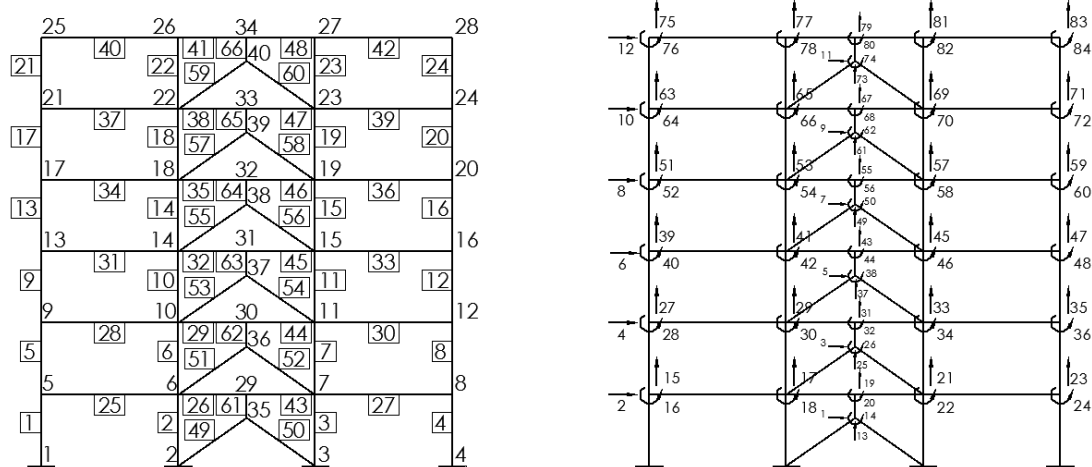


Figura 26 Numeración de nudos, elementos y grados de libertad.

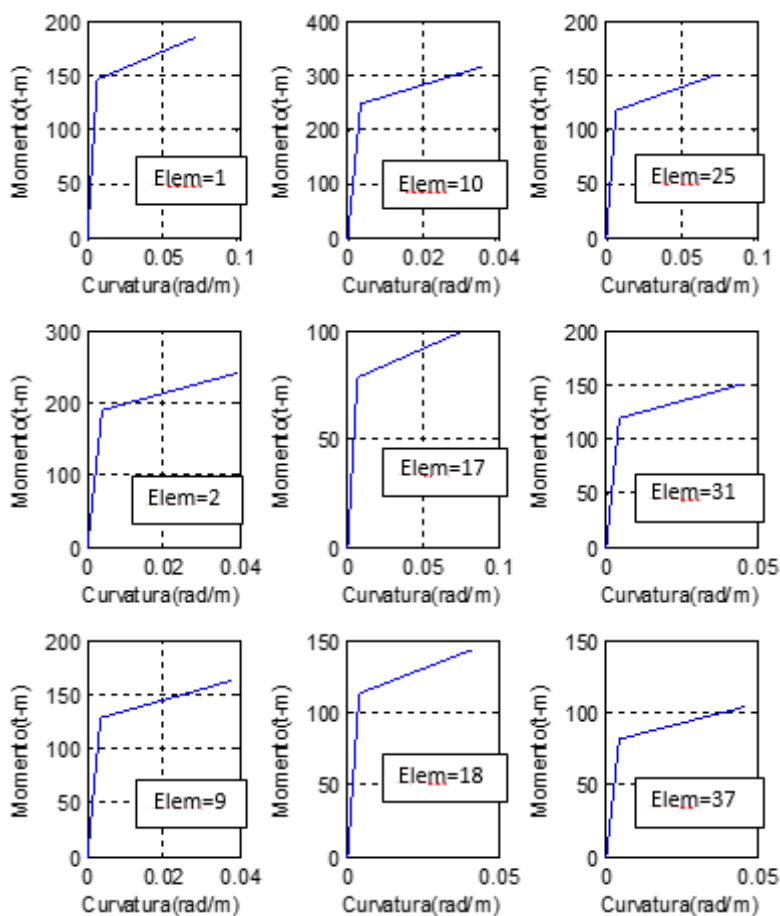
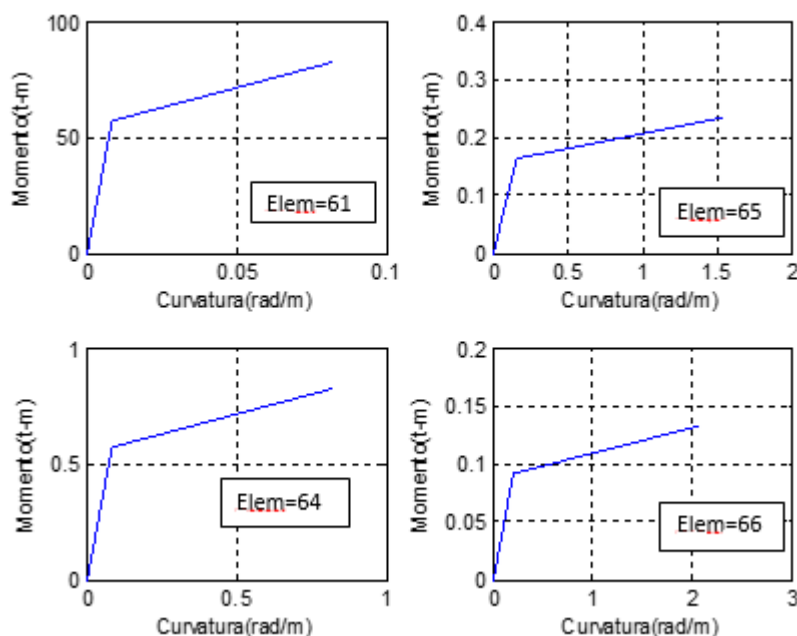


Figura 27 Diagrama momento curvatura de estructura de columnas y vigas

En la figura 27 se presentan los diagramas momento curvatura de algunos elementos estructurales, hallados con un valor  $\alpha = 0.03$  y un valor  $\mu_\phi = 10$ . Cuando se encuentra la respuesta en el tiempo, con un análisis no lineal, en cada instante de tiempo se obtiene el diagrama momento-rotación o el diagrama momento-curvatura y para el caso de las columnas, estos dependen de la carga axial, de tal manera que los presentados son referenciales y tienen como objetivo que el lector pueda reproducirlos utilizando el sistema de computación, **CEINCI-LAB**, que se indica en el siguiente apartado pero únicamente para hallar los diagramas indicados utilizando las tablas proporcionadas por el ASCE 41.



**Figura 28** Diagrama momento curvatura de elemento disipador, en la cara superior.

En la figura 28 se presenta los diagramas momento curvatura del elemento disipador. Nótese que los disipadores de los tres primeros pisos, son iguales y el espesor es de 3 cm., y el número de placas es  $n = 10$ . Los disipadores del cuarto piso son de 4 mm, existe una reducción considerable y el del último piso es de 2 mm. Por este motivo es que disminuye considerablemente la capacidad a flexión de los disipadores 64 a 66.

### • Ejemplo 7

Encontrar el diagrama momento-curvatura de un disipador TADAS en el borde superior, si el ancho es de 15 cm., el espesor (altura) es de 3 cm., el número de placas es  $n = 10$  (Elemento 61). El material es acero A 36; considerar  $\alpha = 0.03$  y  $\mu_\phi = 10$ .

### • Solución

$$b = 0.15 \text{ m}$$

$$h = 0.03 * 10 = 0.3 \text{ m.}$$

$$I = \frac{0.15 * 0.3^3}{12} = 3.375 * 10^{-4} m^4 \quad c = \frac{0.3}{2} = 0.15 m.$$

$$z = \frac{I}{c} = \frac{3.375 * 10^{-4}}{0.15} = 0.0022 m^3$$

$$M_Y = z f_y = 0.0022 * 25300 = 56.925 Tm$$

$$EI = 20430000 * 3.375 * 10^{-4} = 6895.1 Tm.$$

$$\phi_Y = \frac{M_Y}{EI} = \frac{56.925}{6895.1} = 0.0083 \frac{rad}{m}$$

$$\phi_U = 10 * \phi_Y = 0.083 \frac{rad}{m}$$

$$M_U = 56.925 + 0.03 * 6895.1 * (0.083 - 0.0083) = 72.377 Tm$$

Los resultados, corresponden al gráfico del elemento 61 de la figura 27

## 10. COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

El objetivo principal de este artículo, es enseñar al lector, en forma sencilla, la forma de obtener los diagramas momento-rotación, utilizando los criterios y tablas del ASCE 41, y como se pasa al diagrama momento-curvatura, por intermedio de la longitud plástica. Para lograr este objetivo se presentaron algunas deducciones como el cálculo de la rotación de fluencia, la longitud plástica, entre otras, y se realizaron algunos ejemplos en vigas y columnas de hormigón armado y acero; así como en una diagonal de acero se obtuvo la relación fuerza-desplazamiento, tanto a tracción como a compresión.

Por otra parte, se ilustró la forma como se obtiene el diagrama momento curvatura para un disipador de energía ADAS o TADAS, toda vez que las estructuras con estos dispositivos de control son adecuadas para zonas sísmicas.

Finalmente se han presentado programas del sistema de computación **CEINCI-LAB**, que permiten calcular los diagramas momento-rotación; momento-curvatura; fuerza-desplazamiento, siguiendo los lineamientos del ASCE 41.

## REFERENCIAS

1. Aguiar Roberto, Rodríguez Michael, Mora David, (2015,1), *Análisis sísmico de estructuras con disipadores ADAS o TADAS*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE. Monografías de Ingeniería Sísmica, **IS-72**, Universidad Politécnica de Cataluña.
2. Aguiar Roberto, Mora David, Morales Enrique, (2015,2), "Peligrosidad sísmica de Quito y el método del espectro de capacidad", *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*, **20 (1)**, 1-39.

3. Aguiar Roberto, (2014), *Análisis Matricial de Estructuras con CEINCI-LAB*, Cuarta Edición. Instituto Panamericano de Geografía e Historia, IPGH, Ecuador, 676 p., Quito.
4. Aguiar Roberto, (2013), *Microzonificación sísmica de Quito*, Primera Edición. Instituto Panamericano de Geografía e Historia, IPGH, Ecuador, 212 p., Quito.
5. Aguiar Roberto, (2012), *Dinámica de Estructuras con CEINCI-LAB*, Instituto Panamericano de Geografía e Historia, IPGH. Segunda edición, 416 p., Quito.
6. Aguiar Roberto, (2003), *Análisis sísmico por desempeño*, Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército, 342 p., Quito.
7. Aguiar R., (2002) *Sistema de computación CEINCI3 para evaluar daño sísmico en los Países Bolivarianos*, Centro de Investigaciones Científicas. Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, 302 p.
8. ASCE 41 (2011) *Seismic rehabilitation of existing buildings*, American Society of Civil Engineers ASCE/SEI 41-11.
9. Borda, Luis M. (2007), *Desempeño sísmico de un edificio aporticado Peruano de Seis Pisos*, Tesis de Grado Ing. Civil, Pontificia Universidad Católica del Perú.
10. Chiou J.S., Yang H.H., and Chen C.H., (2008). "Plastic hinge setting for nonlinear pushover analysis of Pile foundations", The 14th World Conference on Earthquake Engineering.
11. Lepe, Felipe (2013), *Análisis Numérico de Modelos de Vigas*, Tesis de Grado Universidad del Bio-Bio, Facultad de Ciencias, Chile.
12. Marín Joaquín, (1979), *Comportamiento del concreto armado en flexo compresión*, Folleto de Estructuras N.- 6. Cuarta edición, 232 p., Universidad Central de Venezuela.
13. Medina, Christian D. (2012), *Estudio de la relación momento – curvatura como herramienta para entender el comportamiento de secciones de hormigón armado*. Tesis de Grado, Universidad Técnica de Ambato, Ecuador.
14. Mora Daniel, Aguiar Roberto, (2015), "Modelación de diagrama momento-curvatura y momento-rotación en secciones de acero estructural", *Revista Ciencia*, **17 (1)**, 99-124. Universidad de Fuerzas Armadas, ESPE, Quito, Ecuador.
15. Nuzzo Iolanda, Losanno Daniele, Serino Giorgio, Bozzo Luis, (2015), "A seismic-resistant Precast r.c. System equipped with Shear Link Dissipators for Residential Buildings", *International Journal of Civil and Structural Engineering.*, **2 (1)**, 270-275.
16. Ortiz M., Freire A., (2013) *Análisis no lineal de sistemas de un grado de libertad y sus aplicaciones*. Tesis de grado para obtener título de Ing. Civil. Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, 265 p.
17. Park Y., (1985), *Seismic damage analysis and damage-limiting design for reinforced concrete structures*, Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign.
18. Rogac, M. (2012). "Plastic Analysis of Steel Frame Structure", *Civil Engineering Forum*, Volume XXI/2.

19. Tena, A. (2000), "Modelado analítico de edificios con disipadores de energía", *Revista de Ingeniería Sísmica*, SMIS, No. 62, pp. 29-62, enero-junio.
20. Tena, A. (1997), "Mathematical modelling of the ADAS energy dissipation device", *Engineering Structures*, Vol. 19, No. 10, pp. 811-821.
21. Tsai K-C., Chen H-W., Hong C-P. y Su Y-F, (1993), "Design of steel triangular plate energy absorbers for seismic-resistant construction", *Earthquake Spectra*, **9 (3)**, 505-528.
22. Wittaker A.S., Bertero V., Alonso L., and Thompson C., (1989), *Earthquake simulator testing of steel plate added damping and stiffness elements*, Report UCB/EERC-89/02. Earthquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley.